Devoir libre de Mathématiques n°4

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe plane $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne $xy = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole de foyer $F(\sqrt{2};\sqrt{2})$ et de directrice $\mathcal{D} : x + y = \sqrt{2}$ et déterminer son excentricité.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathcal{H}$ (foyers, sommets, directrices et asymptotes).

Exercice 2

1. On admet la formule du double produit vectoriel :

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{w}$$

   On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ de l'espace.
   Calculer $\overrightarrow{u_1} \wedge (\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_3}) - (\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{u_3}$.

2. On appelle **quaternion** q un couple $(x, \overrightarrow{u})$ où x est un nombre réel appelé **partie réelle** du quaternion et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de l'espace appelé **partie vectorielle** du quaternion.

   On définit ensuite la somme et le produit de deux quaternions $q_1 = (x_1, \overrightarrow{u_1})$ et $q_2 = (x_2, \overrightarrow{u_2})$ par :

$$\begin{array}{ccccl} q_1 & + & q_2 & = & (x_1 + x_2, \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \\ q_1 & \times & q_2 & = & (x_1 x_2 - \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}, x_1\overrightarrow{u_2} + x_2\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}) \end{array}$$

   On considère trois quaternions $q_1 = (x_1, \overrightarrow{u_1})$, $q_2 = (x_2, \overrightarrow{u_2})$ et $q_3 = (x_3, \overrightarrow{u_3})$.
   Calculer $q_1 \times (q_2 \times q_3) - (q_1 \times q_2) \times q_3$.